

Die Heilige Baulinie ¹ geodätische und astronomische Berechnungsgrundlagen

Von Ortwin Feustel – Schloßborn/Taunus

Gemeinhin herrscht die Meinung vor, dass sich die Längsachsen der Kirchen genau in Ost-West-Richtung erstrecken. Eingehende Untersuchungen haben aber gezeigt, dass das nicht immer zutrifft, sondern dass sowohl südliche als auch nördliche Abweichungen von bis zu etwa 25° vorkommen können. Diesen Sachverhalt zu erklären, hat in der Vergangenheit zu den unterschiedlichsten Thesen geführt.

Hier soll nun der durchaus plausiblen Möglichkeit der Vorzug gegeben werden, dass das Mittelschiff zum Sonnenaufgangspunkt am Namenstag des Titularheiligen weist oder aber, wenn zum Patrozinium mehrere Heilige gehören, sich die Abweichung von der Ost-West-Richtung als Summe der betreffenden (vorzeichenbehafteten) Aufgangsweiten darstellt.

Anhand einiger in Geodäsie, Astronomie und Gnomonik gebräuchlichen mathematischen Relationen wird aufgezeigt, wie sich mit ihnen die Lage eines Kirchenschiffs analysieren lässt. Als Basis dienen lokale kirchenhistorische Gegebenheiten hinsichtlich des Patroziniums, Gauß-Krüger-Koordinaten vom Kirchengrundriss und astronomische Kenngrößen zur Zeit des Kirchenbaus. Ein durchgerechnetes Beispiel mit den Schutzheiligen Andreas, Jakobus und Philippus für das Jahr 980 veranschaulicht den Sachverhalt.

Ein Anhang behandelt den Einfluss der Refraktion auf die scheinbare respektiv wahre Position der Sonne in Horizontnähe.

Die Heilige Baulinie

Nach den Gründen für die tendenzielle Ost-West-Ausrichtung – kurz gesagt Ostung – von Kirchenlängsachsen wird seit rund 150 Jahren geforscht. Über die seitherigen, teils sich widersprechenden Erkenntnisse aber auch Mutmaßungen, insbesondere hinsichtlich dieser sowohl nördlich als auch südlich um einige zehn Grad abweichenden Heiligen Baulinie, wird ausführlich berichtet¹.

1) Eckstein R., Büll F. OSB, Hörmig D., Die Ostung mittelalterlicher Klosterkirchen des Benediktiner- und Zisterzienserordens – Versuch einer Deutung (SMGB 106, 1995, 7–78).

Der vorliegende Beitrag folgt dem durch mehrfache und eingehende Untersuchungen untermauerten Lösungsansatz², dass zwischen dem oder den Schutzheiligen einer Kirche und der Ausrichtung des Längsschiffs gegebenenfalls ein eindeutiger Zusammenhang bestehen kann³. Anlass hierzu geben die den sich tagtäglich ändernden Aufgangspunkten der Sonne beigemessenen, gleichnishaften Bedeutungen. Geografisch Ost – an diesem Punkt passiert zu den Tagundnachtgleichen die Sonne den Horizont – verkörpert Christus: Christus ist das Licht der Welt. Übrige Sonnenaufgangspunkte – ihr beidseitiger sphärischer Abstand vom Ostpunkt wird Morgenweite oder Aufgangsweite genannt – versinnbildlichen die Namenstage von sich um Christus scharenden Aposteln respektiv Märtyrern oder anderen Heiligen.

Abweichungen von der exakten Ost-West-Linie sind für zahlreiche Kirchenbauten aus den Jahrhunderten vor der ersten Jahrtausendwende und bis etwa 1125 belegt. Bedeutsam hierbei ist, dass offensichtlich eine mit einem Neubau der Kirche verbundene Änderung des Patroziniums ein Neufestlegen der Heiligen Baulinie zur Folge hatte: ihre Richtung ergab sich nun aus der Summe der (vorzeichenbehafteten) Aufgangsweiten zu den Namenstagen von bisherigen und neuerlichen Titularheiligen. Erkennbare „Knicke“ in der Längsrichtung mancher Baukörper könnten hierin ihre Ursache haben, wenn beispielsweise alte Grundmauern in den Neu- oder Umbau mit einbezogen wurden.

Heilige sind nach der katholischen Kirchenlehre Verstorbene, die sich durch ihr Leben und Sterben qualifiziert haben, als Fürsprecher bei Gott und Christus von den Menschen verehrt und angerufen zu werden⁴. Welchen Heiligen die einzelnen christlichen Gemeinschaften – jedes Jahr wiederkehrend – gedenken wollten, war ihnen anfänglich selbst überlassen gewesen: die Namen ihrer für sie bedeutsamen Heiligen verzeichneten sie mit zugehörigem Datum in lokalen Heiligenkalendern (Festkalendern). Beispielsweise erwähnt das armenische Lektionar der Kirche von Jerusalem zu Beginn des fünften Jahrhunderts über Paulus und Petrus hinaus Thomas, Philippus, Andreas, Jakobus und Johannes⁵.

Der zunächst ausschließlich lokale Bezug der Heiligenkalender verlor sich erst im Laufe der Jahrhunderte, so dass sowohl die Auswahl der Heiligen als auch ihre kalendarische Zuordnung einem fortwährenden Wandel unterlagen. Gegenwärtig ist der Römische Generalkalender von 1969 (Zweites Vatikanisches Konzil) verbindlich, der jedoch u. a. einige Datumsänderungen mit sich brachte.

2) Wie Anm. 1 (S. 13 ff).

3) Dietrich C., Mertens K., Kirchenbau im Mittelalter, Leipzig 1990, 129.

4) Meyers Konversations-Lexikon. Ein Nachschlagewerk des allgemeinen Wissens. Fünfte, gänzlich neubearbeitete Auflage. Erster, achter, neunter und dreizehnter Band. Bibliographisches Institut. Leipzig und Wien, 1895 und 1896.

5) Hoffmann A., Die Anfänge des Heiligenkalenders. In Geerlings W. (Hrsg.), Der Kalender – Aspekte einer Geschichte. Ferdinand Schöningh, Paderborn 2000, 205.

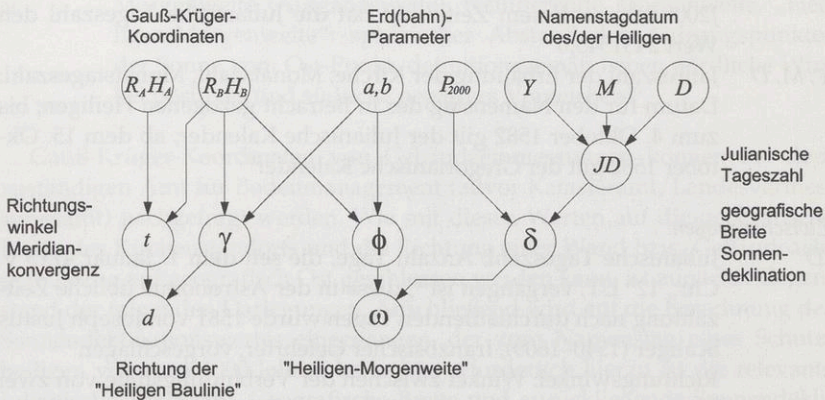


Abb. 1: Flussdiagramm für das Berechnen von Wanddeklination d und Morgenweite ω in Abhängigkeit von geodätischen (R_A, H_A, R_B, H_B, a, b) und astronomischen (P_{2000}, Y, M, D) Parametern.

Mathematisches Prozedere im Überblick

Abb. 1 zeigt das den folgenden Ausführungen zugrunde liegende Berechnungsschema. Die in der obersten Reihe (Eingangsgroßen), in den nächsten beiden Reihen (Zwischengroßen) und in der untersten Reihe (Ausgangsgroßen) verwendeten Symbole bedeuten:

geodätische Eingangsgroßen

R, H Rechtswert und Hochwert: in der Vermessungstechnik benutzte Koordinaten eines ebenen, rechtwinkligen Koordinatensystems (Gauß-Krüger-Koordinaten)⁶; die Indizes A und B dienen zur Unterscheidung der Koordinatenpaare von zwei in Betracht gezogenen Messpunkten des Kirchengrundrisses

a, b große und kleine Halbachse eines die Erdfigur mathematisch beschreibenden Rotationsellipsoids⁷; $a = 6377397,155$ m, $b = 6356078,963$ m

astronomische Eingangsgroßen

P_{2000} Satz von Referenzwerten für die Erdbahnparameter zum 1. Januar 2000, 12^h UT (Abkürzung für diese so genannte Standardepoche:

6) Feustel O., Gauß-Krüger-Koordinaten als Basis für die Berechnung von Sonnenuhren-Parametern, DGC Jahresschrift 2003, Band 42, 153–160.

7) Wie Anm. 6.

J2000.0)⁸; zu diesem Zeitpunkt hat die Julianische Tageszahl den Wert 2451545,0

Y, M, D Jahreszahl der Erbauung der Kirche, Monatszahl, Monatstageszahl: Datum für den Namenstag des in Betracht gezogenen Heiligen; bis zum 4. Oktober 1582 gilt der Julianische Kalender, ab dem 15. Oktober 1582 gilt der Gregorianische Kalender⁹

Zwischengrößen

- JD Julianische Tageszahl: Anzahl Tage, die seit dem 1. Januar 4713 v. Chr., 12^h UT, vergangen ist¹⁰; diese in der Astronomie übliche Zeit-zählung nach durchlaufenden Tagen wurde 1581 von Joseph Justus Scaliger (1540–1609), französischer Gelehrter, vorgeschlagen
- t Richtungswinkel: Winkel zwischen der Verbindungslinie von zwei Messpunkten und einer Parallelen zur Gitter-Nord-Richtung der Geodäsie¹¹
- γ Meridiankonvergenz: Winkel zwischen Geografisch-Nord und Gitter-Nord¹²
- ϕ geografische Breite: sphärischer Abstand eines Standorts auf der Erdoberfläche vom Erdäquator mit in nördlicher Richtung positiven und in südlicher Richtung negativen Werten¹³
- δ Sonnendeklination (Koordinate im Äquatorsystem): sphärischer Abstand vom Himmelsäquator mit in nördlicher Richtung positiven und in südlicher Richtung negativen Werten¹⁴

Ausgangsgrößen

- d Wanddeklination, Richtung der Symmetrieachse des Kirchenschiffs, Richtung der „Heiligen Baulinie“: Abweichung der betreffenden Kirchenwand von der Ost-West-Richtung, definitionsgemäß bedeuten – mit Blick vom Zenit – Drehungen der Wand aus der Ost-West-Richtung heraus im Uhrzeigersinn positive (Index p in Formel (19)) entgegen dem Uhrzeigersinn negative (Index n in Formel (20)) Werte¹⁵

8) Yallop B. D., Hohenkerk C. Y., *Astronomical Phenomena. Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, edited by P. Kenneth Seidelmann. University Science Books, Sausalito, CA, 1992, 484.

9) Meeus J., *Astronomical Algorithms – 2nd edition*. Willmann-Bell, Inc., Richmond, Virginia, 2000, 59.

10) Wie Anm. 9.

11) Wie Anm. 6.

12) Wie Anm. 6.

13) Wie Anm. 6.

14) Wie Anm. 8 und Anm. 9 (S. 91).

15) Wie Anm. 6 und Feustel O., *Ergänzende Anmerkungen zum Berechnen der Polos-Sonnenuhr*. DGC Jahresschrift 2005, Band 44, 217–222.

ω Morgenweite (Aufgangsweite), resultierende Morgenweite, „Heiligen-Morgenweite“: sphärischer Abstand des Aufgangspunktes der Sonne vom Ost-Punkt, definitionsgemäß haben nördliche Winkel positives und südliche negatives Vorzeichen¹⁶

Gauß-Krüger-Koordinaten von Gebäudeeinemessungen können bei dem zuständigen Amt für Bodenmanagement (zuvor Katasteramt/Landesvermessungsamt) nachgefragt werden. Wie mit diesen Werten auf die geografische Breite des Kirchenstandorts und die Richtung einer Wand bzw. Gebäudeachse in bezug auf geografisch Ost geschlossen werden kann, ist zunächst Gegenstand der folgenden Darlegungen. Anschließend wird auf die Berechnung des Sonnendeklinationwertes eingegangen, der zum Namenstag eines Schutzheiligen vor etwa 1000 Jahren herrschte; erforderlich hierzu ist die relevante Julianische Tageszahl. Geografische Breite und zurückliegende Sonnendeklination fließen letztendlich in die Formel für die Morgenweite des oder der Titularheiligen ein.

Gauß-Krüger-Koordinaten¹⁷

Das von C.-F. Gauß (1777 bis 1855) ersonnene und von L. Krüger (1857 bis 1923) weiterentwickelte Verfahren dient dazu, nach mathematischen Vorschriften sowohl Teile der gekrümmten Erdoberfläche auf eine Ebene als auch Ausschnitte einer Ebene auf die gekrümmte Erdoberfläche abzubilden. Zu diesem Zwecke wird die durch eine Ellipsoidoberfläche angenäherte Erdoberfläche in so genannte Meridianstreifen definierter Längenausdehnung zerlegt und jedem Meridianstreifen ein Haupt- oder Mittelmeridian zugeordnet, mit dem Ziel,

- die wechselseitigen Abbildungen Ellipsoid \leftrightarrow Ebene konform, also *winkeltreu*, und
- die wechselseitigen Abbildungen Hauptmeridian \leftrightarrow Abszissenachse eines zweidimensionalen rechtwinkligen Bezugssystems *längentreu* vorzunehmen.

Weitere Symbole und ihre Bedeutung sind:

- x Gaußsche Abszisse (längentreues Abbild des Hauptmeridians): sie wird vom Äquator ausgehend in Metern gezählt
- y Gaußsche Ordinate: sie wird auf dem Äquator gezählt und in Metern angegeben; sie hat vom Hauptmeridian aus nach Osten positives, nach Westen negatives Vorzeichen

16) Wie Anm.1 (S. 20).

17) Wie Anm. 6 für diesen und die nächsten beiden Abschnitte.

- K Kennzahl für Meridianstreifen: sie nimmt für Deutschland die Werte 2, 3, 4 bzw. 5 an und ist die erste Ziffer eines Rechtswertes
- λ_0 geografische Länge des Hauptmeridians

1927 wurde das Gauß-Krüger-System in die amtliche deutsche Kartografie eingeführt. Für die Hauptmeridiane der 3° breiten Meridianstreifen gilt

$$(1) \lambda_0 = 3 \cdot K,$$

d. h. sie liegen bei 6° , 9° , 12° und 15° östlicher Länge. Die Meridianstreifen haben eine Breite von etwa 200 km.

Innerhalb eines 3° -Meridianstreifensystems ist jeder im Liegenschaftskataster aufgeführte Messpunkt mit den Koordinatenangaben Rechtswert R und Hochwert H festgelegt.

$$(2) R = K \cdot 10^6 + 500000 + y,$$

$$(3) H = x.$$

Mit dem Zuschlag 500000 werden negative R -Werte vermieden. Die Werte von (2) und (3) haben die Dimension Meter; sie sind siebenstellig vor und dreistellig nach dem Komma.

Geografische Breite

Zum Transformieren von Gauß-Krüger-Koordinaten in geografische Koordinaten dienen Potenzreihen. Es werden folgende, neue Formelzeichen verwendet:

- ϕ_f Fußpunktbreite auf dem Rotationsellipsoid
- e'^2, η_f^2, N_f^2 Hilfsgrößen
- N_f Normalkrümmungsradius für ϕ_f

Ausgehend von der Potenzreihe für den Meridianbogen (Länge des Meridians vom Äquator bis zur geografischen Breite ϕ)

$$(4) B = 6366742,521 \cdot \phi - 15988,63853 \cdot \sin(2 \cdot \phi) + 16,72995 \cdot \sin(4 \cdot \phi) - 0,02178 \cdot \sin(6 \cdot \phi) + 0,00003 \cdot \sin(8 \cdot \phi) + \dots$$

erhält man mit der Bedingung

$$(5) H - B = 0 \text{ für } \phi \rightarrow \phi_f$$

durch Iteration die Fußpunktbreite ϕ_f ; sie geht ein in die Relationen (7), (8), (10) und (12). Ein Iterations-Verfahren ist unabdingbar, weil aus (4) mit der

Bedingung $H = B$ eine explizite Funktion für den gesuchten Breitenwinkel $\phi_f = f(H = B)$ (im Bogenmaß) nicht abgeleitet werden kann.

Führt man die Berechnungen beispielsweise mit EXCEL durch, so steht die Funktion „Zielwertsuche“ zur Verfügung. Zunächst sollten die eingestellte „Maximale Iterationszahl“ und die „Maximale Änderung“ überprüft und gegebenenfalls korrigiert werden, um die notwendige Genauigkeit zu erreichen. Im unter „Extras“ aufzurufenden Dialogfeld „Zielwertsuche“ sind dann bei „Zielzelle“, „Zielwert“ und „Veränderbare Zelle“ die entsprechenden Einträge vorzunehmen.

Die Hilfsgrößen bekommt man aus

$$(6) e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2},$$

$$(7) \eta_f^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \phi_f \text{ und}$$

$$(8) t_f = \tan \phi_f.$$

Mit (7) folgt der Normalkrümmungsradius zu

$$(9) N_f = \frac{a^2}{b \cdot \sqrt{1 + \eta_f^2}}.$$

Unter Einbeziehung der voranstehenden Größen lautet die Potenzreihe für die gesuchte geografische Breite (im Bogenmaß)

$$(10) \phi = \phi_f - \frac{t_f}{2 \cdot N_f^2} \cdot (1 + \eta_f^2) \cdot y^2 + \frac{t_f}{24 \cdot N_f^4} \cdot (5 + 3 \cdot t_f^2 + 6 \cdot \eta_f^2 - 6 \cdot \eta_f^2 \cdot t_f^2) \cdot y^4 + \dots$$

wobei sich die Gaußsche Ordinate durch Umformung aus (2) ergibt

$$(11) y = R - K \cdot 10^6 - 500000.$$

Ergänzend hierzu sei auch die Potenzreihe für die geografische Länge λ (im Bogenmaß) angegeben – sie wird jedoch im Zusammenhang mit der Heiligen Baulinie nur bedingt benötigt, siehe Relation (18) –

$$(12) \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{N_f \cdot \cos \phi_f} \cdot y - \frac{1 + 2 \cdot t_f^2 + \eta_f^2}{6 \cdot N_f^3 \cdot \cos \phi_f} \cdot y^3 + \frac{5 + 28 \cdot t_f^2 + 24 \cdot t_f^4}{120 \cdot N_f^5 \cdot \cos \phi_f} \cdot y^5 + \dots$$

mit dem Hauptmeridian gemäß (1).

Richtungswinkel, Meridiankonvergenz, Wanddeklination

Begriffsbestimmungen:

Ortsmeridian	Großkreis durch den Rotationspol der Erde und einen geodätischen Messpunkt; alle Punkte auf diesem Meridian haben die gleiche geografische Länge
Geografisch-Nord	Nordrichtung des Ortsmeridians durch einen geodätischen Messpunkt
Gitter-Nord	nördliche Richtung der durch einen geodätischen Messpunkt gelegten Parallelen zum Hauptmeridian eines Meridianstreifensystems
Richtungswinkel	entsteht, wenn bei gegebenen geodätischen Messpunkten $A(R_A, H_A)$ und $B(R_B, H_B)$ die durch A zur Richtung Gitter-Nord gelegte Parallele rechtsläufig gedreht wird bis diese durch B geht
Meridiankonvergenz	der im Uhrzeigersinn positiv zunehmende Winkel zwischen Geografisch-Nord und Gitter-Nord; für einen geodätischen Messpunkt östlich eines Hauptmeridians gilt das positive für einen geodätischen Messpunkt westlich eines Hauptmeridians das negative Vorzeichen; liegt der geodätische Messpunkt genau auf dem Hauptmeridian, so hat die Meridiankonvergenz den Wert null

Der Richtungswinkel (im Gradmaß) ergibt sich aus

$$(13) \quad t = \arctan \frac{R_B - R_A}{H_B - H_A}$$

und zum Berechnen der Meridiankonvergenz (im Bogenmaß) dient wiederum eine Potenzreihe

$$(14) \quad \gamma = \frac{t_f}{N_f} \cdot y - \frac{t_f}{3 \cdot N_f^3} \cdot (1 + t_f^2 - \eta_f^2) \cdot y^3 + \dots$$

Bricht man die Reihen (10), (12) und (14) nach dem linearen Glied ab, so erhält man (15) $\phi \approx \phi_f$,

$$(16) \quad \lambda \approx \lambda_0 + \frac{1}{N_f \cdot \cos \phi_f} \cdot y,$$

$$(17) \quad \gamma \approx \frac{t_f}{N_f} \cdot y.$$

(16) nach y umgeformt und in (17) eingesetzt sowie Berücksichtigung von (8) und (15) ergibt für die Meridiankonvergenz die Näherungsformel

$$(18) \gamma \approx (\lambda - \lambda_0) \cdot \sin \phi.$$

Die Wanddeklination leitet sich direkt aus Richtungswinkel und Meridiankonvergenz (im Gradmaß) ab; zu unterscheiden ist nur, ob die Normale einer Südwand westwärts bzw. die Normale einer Nordwand ostwärts weist

$$(19) d_p = t + \gamma + 90^\circ,$$

oder die Normale einer Südwand ostwärts bzw. die Normale einer Nordwand westwärts zeigt

$$(20) d_n = t + \gamma - 90^\circ.$$

Julianische Tageszahl

Zum Umrechnen eines Datums Y, M, D im Gregorianischen oder Julianischen (in diesem Kontext vor rund einem Jahrtausend der Namenstag eines Schutzheiligen) Kalender in die adäquate Julianische Tageszahl dient die folgende Formel¹⁸:

$$(21) JD = \text{floor}(365,25 \cdot (Y_Y + 4716)) + \text{floor}(30,6001 \cdot (M_M + 1)) + D + F - 1524,5$$

Die Funktion $\text{floor}(x)$ oder $\text{INT}(x)$ liefert die größte ganze Zahl $\leq x$.

In Abhängigkeit vom infrage kommenden Kalender und von der Monatszahl sind den Variablen Y_Y, M_M und F in (21) und einer Hilfsgröße E die nachfolgenden Werte zuzuordnen.

	Gregorianischer Kalender		Julianischer Kalender	
	$M = 1$ oder 2	$M > 2$	$M = 1$ oder 2	$M > 2$
(22) $Y_Y =$	$Y - 1$	Y	$Y - 1$	Y
(23) $M_M =$	$M + 12$	M	$M + 12$	M
(24) $E =$	$\text{floor}\left(\frac{Y-1}{100}\right)$	$\text{floor}\left(\frac{Y}{100}\right)$	nicht relevant	nicht relevant
(25) $F =$	$2 - E + \text{floor}\left(\frac{E}{4}\right)$	$2 - E + \text{floor}\left(\frac{E}{4}\right)$	0	0

Ein Julianischer Tag beginnt stets um 12^h. Bei der Monatstageszahl D werden Stunden, Minuten und Sekunden als Dezimalstellen angefügt.

18) Wie Anm.9 (S.60ff).

Sonnendeklination, Morgenweite

Es bedeuten:

- T Anzahl der Jahrhunderte ab J2000.0
 L mittlere Länge: Winkelabstand vom Frühlingspunkt (Schnittpunkt von Ekliptik und Himmelsäquator, an diesem Punkt passiert die Sonne den Himmelsäquator von Norden nach Süden), wenn sich die Erde gleichmäßig auf einer Kreisbahn in der Äquatorebene um die Sonne bewegen würde
 G mittlere Anomalie: Winkelabstand vom Perihel (sonnennächster Punkt auf der elliptischen Erdbahn), wenn sich die Erde gleichmäßig auf einer Kreisbahn in der Äquatorebene um die Sonne bewegen würde
 Λ ekliptikale Länge: Winkelabstand zum Frühlingspunkt (Schnittpunkt von Ekliptik und Himmelsäquator, an diesem Punkt passiert die Sonne den Himmelsäquator von Norden nach Süden) auf der Ekliptik; Zählung in Richtung des jährlichen Umlaufs um die Sonne
 ε Schiefe der Ekliptik: Winkel zwischen Ekliptik und Äquator
 h Sonnenhöhe (Koordinate im Horizontsystem): sphärischer Abstand vom Horizont¹⁹
 A Sonnenazimut (Koordinate im Horizontsystem): sphärischer Abstand vom Ortsmeridian (0°); es wird in der Astronomie über Westen (90°), Norden (180°) und Osten (270°) gezählt²⁰

Zum Berechnen der zu einer vorgegebenen Julianischen Tageszahl herrschenden Sonnendeklination, müssen zunächst mit den Formeln (26) bis (30) die hierfür benötigten Werte ermittelt werden²¹:

$$(26) T = \frac{JD - 2451545,0}{36525},$$

$$(27) L = 280,460^\circ + 36000,770^\circ \cdot T,$$

$$(28) G = 357,528^\circ + 35999,050^\circ \cdot T,$$

$$(29) \Lambda = L + 1,915^\circ \cdot \sin G + 0,020^\circ \cdot \sin 2 \cdot G,$$

$$(30) \varepsilon = 23,4393^\circ - 0,01300^\circ \cdot T.$$

Die letztendlich interessierende Sonnendeklination liefert

$$(31) \delta = \arcsin(\sin \varepsilon \cdot \sin \Lambda).$$

19) Wie Anm. 9 (S.91).

20) Wie Anm. 19.

21) Wie Anm. 8 (S. 484-485).

Das eingangs verwendete Symbol P_{2000} bezieht sich auf die Gesamtheit der in (27) bis (30) enthaltenen Konstanten (Winkelwerte).

Zwischen den Koordinaten von Äquatorsystem und Horizontsystem besteht u. a. die Beziehung

$$(32) \sin \delta = \sin \phi \cdot \sin h - \cos \phi \cdot \cos h \cdot \cos A.$$

Passiert der Mittelpunkt der Sonnenscheibe den Horizont, so soll ohne Berücksichtigung der Refraktion²² $h = 0$ sein und aus (32) wird

$$(33) \cos A_{h0} = -\frac{\sin \delta}{\cos \phi}.$$

Da sich Sonnenazimut in Horizonhöhe und Morgenweite zu 270° ergänzen

$$(34) A_{h0} = 270^\circ - \omega,$$

folgt aus (33)

$$(35) \omega = \arcsin \frac{\sin \delta}{\cos \phi}.$$

Gehören mehrere Heilige (auch aus unterschiedlichen Jahrhunderten) zum Patrozinium, so gilt

$$(36) \omega_{res} = \arcsin \frac{\sin \delta_1}{\cos \phi} + \arcsin \frac{\sin \delta_2}{\cos \phi} + \dots$$

Beispiel

Eine Kirche sei im Jahre 980 (Julianischer Kalender!) den Schutzheiligen Andreas, Jakobus und Philippus geweiht worden. Das Meyers Konversations-Lexikon²³ liefert folgende Beschreibung zum Leben der genannten Heiligen:

Andreas, („der Männliche“), einer der zwölf Jünger Jesu, Bruder des Simon Petrus, tritt in der evangelischen Geschichte wenig hervor, während ihn die Sage in Kleinasien und Skythien, d. h. in den Ländern am Schwarzen Meer bis an die Wolga (daher Schutzpatron Rußlands), das Evangelium predigen, auf der Rückreise die Kirche von Byzanz gründen und dann in Paträ den Märtyrertod erleiden läßt, und zwar am Kreuz mit schrägen Balken („Andreaskreuz“). Gedächtnistag ist der 30. November.

22) Siehe Anhang.

23) Wie Anm. 4.

Jacobus, Name von mindestens drei nach dem Neuen Testament bei der Konstituierung der christlichen Kirche thätig gewesenen Männern: J. der ältere (major), Sohn des Fischers Zebedeus und Bruder des Johannes, einer der zwölf Apostel, soll nach Spanien gekommen sein, weshalb er (Santiago) als Schutzheiliger dieses Landes verehrt wird (s. Santiago de Compostela). Er erlitt unter Herodes Agrippa (44 n. Chr.) den Martyrertod durch das Schwert. Sein Tag ist der 25. Juli, in der griechischen Kirche der 30. April. – J. der jüngere (minor), Sohn des Alphäus, war ebenfalls Apostel und wird in der griechischen Kirche 9. Oktober, in der katholischen Kirche mit Philippus (s. d.) 1. Mai verehrt. – J. der Große, der Älteste unter den Brüdern Jesu, welchen nach Josephus („Antiquit. jud.“, XX, 9, 1) der Hohepriester Ananias in der Zwischenzeit nach der Abreise des Festus und vor der Ankunft des neuen Prokurators (62 n. Chr.) steinigen ließ.

Philippus, einer der Jünger Jesu, aus Bethsaida gebürtig. Die Tradition läßt ihn das Evangelium in Phrygien und Skythien, vorzüglich aber in Kleinasien verkündigen und in Hierapolis den Tod finden. Er wird in der katholischen Kirche 1. Mai (gemeinschaftlich mit Jacobus dem jüngern), in der griechischen Kirche 14. Nov. verehrt.

Der Heilige Andreas hat folglich seinen Namenstag am 30. November; für die Heiligen Jakobus und Philippus ist der gemeinsame Namenstag der 1. Mai.

Die nach Westen von der Ost-West-Richtung abweichende südliche Wand einer Kirche habe an ihren Ecken A und B – siehe Abb. 2 – die Gauß-Krüger-Koordinaten:

$$R_A = 3456064,640 \text{ m}, H_A = 5562773,360 \text{ m} \text{ und} \\ R_B = 3456046,600 \text{ m}, H_B = 5562777,110 \text{ m}.$$

Es soll überprüft werden, ob die Richtungen von Symmetrieachse des Längsschiffs und resultierender Morgenweite identisch sind.

In der folgenden tabellarischen Zusammenfassung der Rechenergebnisse sind Eingangswerte mit kursiver, Zwischenwerte mit normaler und Ausgangswerte mit fetter Schreibweise gekennzeichnet.

Formel	Größe	Wert	Bemerkung
	R_A	3456064,640 m	Rechtswert von Meßpunkt A
	H_A	5562773,360 m	Hochwert von Meßpunkt A
	R_B	3456046,600 m	Rechtswert von Meßpunkt B
	H_B	5562777,110 m	Hochwert von Meßpunkt B
	R_{mittel}	3456055,620 m	
	H_{mittel}	5562775,235 m	
	ϕ_f	0,876194833 rad	veränderbare Zelle

(4)	B	5562775,235 m	
(5)	$H_{\text{mittel}} - B$	0,0000100 m	Zielzelle; Zielwert: 0,00001
(8)	t_f	1,200333804	
	t_f^2	1,440801241	
	t_f^4	2,075908216	
	a	6377397,155 m	Rotationsellipsoid-Halbachse
	b	6356078,963 m	Rotationsellipsoid-Halbachse
(6)	e'^2	0,0067719219	
(7)	η_f^2	0,002752874	
(9)	N_f	6389997,463	
	N_f^2	4,08321E+13	
	N_f^3	2,60917E+20	
	N_f^4	1,66726E+27	
	N_f^5	1,06538E+34	
	K	3	
(11)	y	-43944,380 m	
	y^2	1931108534	
	y^3	-8,48614E+13	
	y^4	3,72918E+18	
	y^5	-1,63877E+23	
(10)	ϕ	0,876166372 rad	50,20063525°; 50° 12' 2,29"
(1)	λ_0	9°	
(12)	λ	0,146335891 rad	8,384428933°; 8° 23' 3,94"
(13)	t	-4,810666667 rad	-78,25707946°; -78° 15' 25,49"
(14)	γ	-0,008254447 rad	-0,472944994°; -28' 22,60"
(19)	d_p	11,26997555°	11° 16' 11,91": Richtung der Längsschiffachse
	Y_{PJ}, M_{PJ}, D_{PJ}	980, 5, 1	Namenstag Philippus/Jakobus
(22)	Y_{YPJ}	980	
(23)	M_{MPJ}	5	
(25)	F_{PJ}	0	
(21)	JD_{PJ}	2,0791235E+6	
(26)	T_{PJ}	-10,196	
(27)	L_{PJ}	-315,810°	
(28)	G_{PJ}	-221,204°	
(29)	Λ_{PJ}	-314,568°	
(30)	ε_{PJ}	23,572°	
(31)	δ_{PJ}	16,552°	
(35)	ω_{PJ}	26,428°	Morgenweite Philippus/Jakobus
	Y_A, M_A, D_A	980, 11, 30	Namenstag Andreas
(22)	Y_{YA}	980	
(23)	M_{MA}	11	

(25)	F_A	0	
(21)	JD_A	2,0793365E+6	
(26)	T_A	-10,191	
(27)	L_A	-105,867°	
(28)	G_A	-11,272°	
(29)	Λ_A	-106,249°	
(30)	ε_A	23,572°	
(31)	δ_A	-22,577°	
(35)	ω_A	-36,854°	Morgenweite Andreas
(36)	ω_{res}	-10,426°	-10° 25' 33,6": resultierende Heiligen-Morgenweite

Die Winkel der Symmetrieachse des Längsschiffs und der resultierenden Morgenweite bezüglich geografisch Ost differieren nur um 0,844°, siehe auch Abb. 2; die Ausrichtung des Kirchenbaus könnte sich also durchaus am Patrozinium der Heiligen Andreas, Jakobus und Philippus orientiert haben.

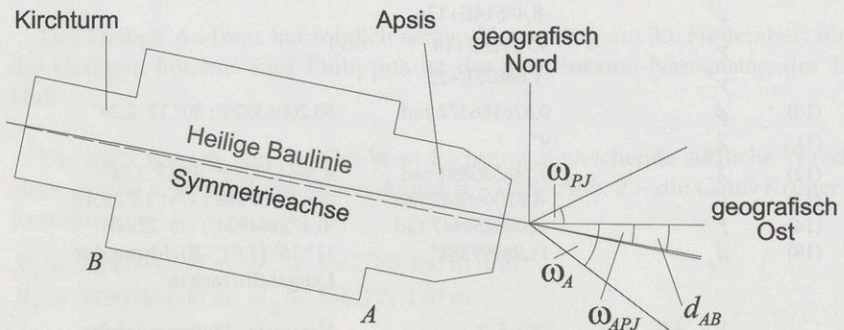


Abb. 2: Grundriss einer Kirche mit den geodätischen Messpunkten A und B ; angefügt sind ferner mit Bezug auf geografisch Ost die Morgenweiten der Schutzheiligen ω_A und ω_{PJ} , die hieraus resultierende Morgenweite ω_{res} sowie die Richtung der Symmetrieachse des Kirchenschiffs (Wanddeklination) d_p .

Schlussbemerkungen

Der Vergleich der mit (19) bzw. (20) und (35) bzw. (36) gewonnenen Werte kann sicherlich dabei behilflich sein, einen vermuteten Zusammenhang zwischen Heiliger Baulinie und Heiligen-Morgenweite (rechnerisch) zu analysieren; die endgültige Beurteilung wird jedoch – auch mit (nahezu) übereinstimmenden Winkelbeträgen bei definitionsbedingt unterschiedlichen Vorzeichen – weitere historische und standortbedingte Fakten einbeziehen müssen.

Mit der voranstehenden Rechenprozedur kann auch das (wahrscheinliche) Jahr der Errichtung der Kirche zurückgerechnet werden, wenn nur der Tag bekannt ist, an dem nach mittelalterlichem Kalender des Patrons gedacht wird. Hierzu muss man die Morgenweite ω (Gleichung (35)) für unterschiedliche Jahreszahlen Y (Gleichung (22)) berechnen und nach dem Prinzip *Versuch-und-Irrtum* in Beziehung zur bereits vorliegenden Richtung der Längsschiffachse d_p ggf. d_n (Gleichung (19) ggf. (20)) setzen. Gehören mehrere Schutzheilige – auch für Bauphasen aus unterschiedlichen Jahrhunderten – zum Patrozinium, so sind die Auswirkungen der variierten Jahreszahlen auf die resultierende Morgenweite ω_{res} (Gleichung (36)) zu bewerten.

Anhang

Refraktion

Die Refraktion – Strahlenbrechung in der Erdatmosphäre – bewirkt eine scheinbare Hebung der Gestirnsposition, d. h., die scheinbare (beobachtete) Gestirns Höhe h_b ist nicht identisch mit der wahren Gestirns Höhe h . Das markanteste Beispiel für diesen Effekt ist die direkt wahrnehmbare, ovale Verformung der Sonnenscheibe in Horizontnähe: scheinbar verkürzter vertikaler Durchmesser. Mit folgender Näherungsformel²⁴ lässt sich mit hinreichender Genauigkeit die Refraktion

$$(1) R_{hb} = \frac{1}{\tan\left(h_b + \frac{7,31}{h_b + 4,4}\right)}$$

im gesamten Höhenbereich von 90° bis 0° ermitteln; das Ergebnis hat die Dimension Minuten ('). Der Betrag der Refraktion wächst mit steigendem Luftdruck, sinkender Lufttemperatur und abnehmender Lichtwellenlänge. Gleichung (1) hat ihre Gültigkeit für Beobachtungen auf Meeresebene und bei Luftdruck $p = 1010 \text{ mbar}$, Lufttemperatur $\vartheta = 10^\circ \text{ C}$ sowie gelbem Licht. Davon abweichende Luftparameter können mit dem Korrekturfaktor²⁵

$$(2) k = \frac{p}{1010} \cdot \frac{283}{273 + \vartheta}$$

berücksichtigt werden: mit ihm ist ggf. der Wert von (1) zu multiplizieren.

Die wahre Höhe bekommt man mit (1) aus

$$(3) h = h_b - R_{hb} \cdot k$$

24) Wie Anm. 6 (S. 106).

25) Wie Anm. 6 (S. 107).

Beispiel: Das Zentrum der Sonne befinde sich für den Beobachter auf dem Horizont, d. h. $h_b = 0^\circ$, der wahre Winkeldurchmesser der Sonne betrage rund $32'$. Welches ist die wahre Position der Sonne in diesem Moment, wenn $k = 1$? Relation (1) des Anhangs liefert hierfür die Refraktion $R_{hb} = 34,478'$, womit aus Gleichung (3) $h = 0^\circ - 34,478' = -34,478'$ folgt. Die wahre Position des Sonnenzentrums liegt demnach $34,478'$ unter dem Horizont oder – anders ausgedrückt – der obere Sonnenrand hat noch $16' - 34,478' = -18,478'$ Abstand vom Horizont.

Soll die scheinbare Höhe eines Gestirns bei bekannter wahrer Höhe berechnet werden, so gilt

$$(4) h_b = h + R_h$$

mit²⁶

$$(5) R_h = \frac{1,02}{\tan\left(h + \frac{10,3}{h + 5,11}\right)}$$

Der mit (5) berechnete Betrag ist ggf. mit dem Korrekturfaktor gemäß (2) zu multiplizieren.

Beispiel: Welche Höhe des unteren Sonnenrandes würde ein Beobachter messen, wenn sich das wahre Sonnenzentrum auf dem Horizont befindet und $k = 1$ ist? Der wahre Winkeldurchmesser der Sonne betrage rund $32'$. Für $h = -16' = -0,267^\circ$ bekommt man aus (5) $R_h = 31,41'$, so dass bei $h_b = -16' + 31,10' = 15,41'$ über dem Horizont der untere Sonnenrand zu beobachten wäre.

Das Sonnenazimut in Horizontnähe

Aus den obigen beiden Beispielen geht hervor, dass die Sonnenscheibe infolge Refraktion schon teilweise oder ganz über dem Horizont zu sehen ist, obwohl sie sich noch ganz oder teilweise unterhalb der Horizontlinie befindet. Das ganze spielt sich – je nach Betrachtungsweise – in etwa im Höhenbereich eines Sonnenhalbmessers bzw. -durchmessers ab. Es ist daher durchaus interessant, sich die zu diesen doch geringen Höhenwerten gehörenden Sonnenazimutwerte bewusst zu machen.

Zwischen den Koordinaten von Äquatorsystem (Deklination δ) und Horizontsystem (Höhe h , Azimut A) sowie der geografischen Breite ϕ besteht u. a. die Beziehung

$$(6) \cos A = \frac{\sin \phi \cdot \sin h - \sin \delta}{\cos \phi \cdot \cos h}$$

26) Wie Anm. 24.

Die folgende Tabelle gibt für $\phi = 50^\circ$ und einige ausgewählte Sonnendeklinationenwerte die Differenz $\Delta A = A(h = 0) - A(h)$ zwischen dem Sonnenazimut für $h = 0^\circ$ (entspricht der wahren Sonnenaufgangshöhe) und dem Sonnenazimut für wahre Höhen unterhalb des Horizonts entsprechend einem Sonnenhalbmesser bzw. -durchmesser wieder.

	$\delta = 23,44^\circ$	$\delta = 15^\circ$	$\delta = 0^\circ$	$\delta = -15^\circ$	$\delta = -23,44^\circ$
$h = -0,267^\circ$	-0,407°	-0,348°	-0,318°	-0,346°	-0,403°
$h = -0,533^\circ$	-0,815°	-0,697°	-0,635°	-0,691°	-0,802°

Ein Beobachter kann folglich – je nach dem welcher Sonnenposition in Horizontnähe er den Moment des erfolgten Sonnenaufgangs zuordnet – für die beobachtete (scheinbare) Morgenweite ω_b einen von der wahren Morgenweite ω abweichenden Wert messen: mit Bezug auf den exakten Ostpunkt ergibt sich somit in nördlicher Richtung $\omega_b \geq \omega$ und in südlicher Richtung $\omega_b \leq \omega$. Wie man sieht, können die Abweichungen im ungünstigsten Fall immerhin an $\pm 1^\circ$ heranreichen.